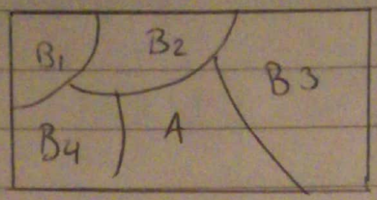
Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας - Bayes   31/10/17



$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{P(A)}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Τεστ θετικό στο 80% που ένα άτομο έχει πράγματι την ασθένεια

— // — στο 10% που — // —

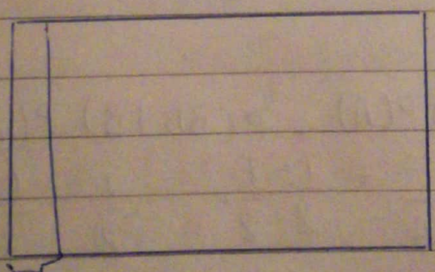
δεν έχει την ασθένεια

Το 1% του πληθυσμού παρουσιάζει την ασθένεια

P (άτομο θετικό τέστ)

P (άτομο έχει, τεστ θετικό)

<u>Λύση</u>: $A = \{$τεστ θετικό$\}$



1%

S πληθυσμός

$B_1 = \{$άτομο έχει ασθένεια$\}$

$B_2 = \{$άτομο να μην έχει ασθένεια$\}$

$P(B_1) = 1\% = 0{,}01$

$P(A \mid B_1) = 80\% = 0{,}8$

$P(A \mid B_2) = 10\% = 0{,}1$

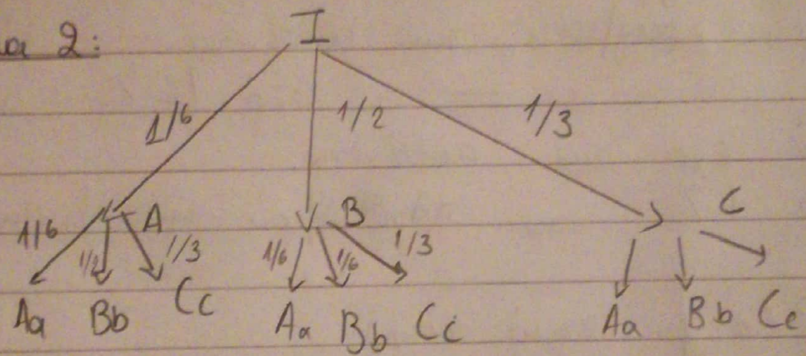
a) $P(A) \overset{\Theta.O.\Lambda.}{=\!=} P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$

$= 0,8 \times 0,01 + 0,1 \times 0,99 = 0,107$

b) $P(B_1|A) =$

$= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,8 \times 0,01}{0,107} = 0,075 = 7,5\%$

Παράδειγμα 2:



a) $P(Bb) =$;

b) $P(C/Bb) =$;

a) $P(Bb) \overset{\Theta.O.\Lambda.}{=\!=} P(Bb|A)P(A) + P(Bb|B)P(B) +$
$P(Bb|C)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

b) $P(C/Bb) = \frac{P(Bb|C)P(C)}{P(Bb)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $P(C \mid Bb) = \frac{1}{3} P(C)$

(Δεσμευμ. πιθανότητα από ενδεχόμενα)

$P(A \mid B) > P(A)$

$P(A \mid B) < P(A)$

$P(A \mid B) = P(A)$ *

Ορισμός (Ανεξαρτησία ενδεχομένων):
$P(A \mid B) = P(A)$
Όταν ισχύει αυτή η ισότητα μιλάω για ανεξαρτησία ενδεχομένων

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ορισμός: $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $A, B \in \mathcal{A}$. Τα A, B λέγονται ανεξάρτητα αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Ορισμός: (ΕΠΕΚΤΑΣΗ)
Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. και $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$
Τα $A_1, A_2, \ldots A_n$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν $\forall$ υποσύνολο δεικτών $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ του $\{1, 2, \ldots n\}$ $k = 2, \ldots n$ ισχύει $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\} =$

$= P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$

Περίπτωση που $n>3$

Τα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)\,P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Νόμισμα ρίχνεται 3 φορές

A_i = {αποτέλεσμα i-ρίψης είναι Κ} $i=1,2,3,\ldots$

είναι τα A_i ανεξάρτητα

$S = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

$P(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$

Επειδή οι ισότητες ικανοποιούνται τα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα: $P(\Gamma) = p$, $0<p<1$ ρίχνεται n-φορές

P(εμφάνισης τουλάχιστον μιας φοράς της όψης Γ)

$P(A^c) = 1 - P(A)$

άρα $P(\text{τουλ. 1 γράμμα}) = 1 - P(\text{κανένα γράμμα})$
$= 1 - P(K \cap K \cap \dots K)$

$= 1 - P(K) \times \dots \times P(K)$ (ανεξαρτησία)

$= 1 - (1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p)$
$= 1 - (1-p)^k$

Πρόβλημα 1:
10 άσπρες
5 κόκκινες
10 μαύρες

$P(\text{κοκκινη}) = \frac{5}{15}$

Πρόβλημα 2: 52 → 4 παίκτες
Αν οι δύο έχουν 8 καρό από τα 13
P(ο τρίτος να έχει 3 καρό από τα)

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

$\frac{3}{26}$ (θέμα)

- 7 μπάλες
  - 3 κόκκινες
  - 4 άσπρες

$$\frac{\left(3 \quad {6 \atop 3}\right)}{\left(3 \quad {7 \atop 4}\right)}$$

πολυωνυμικός συντελεστής

αν ήταν διαφορετικά όλα μεταξύ τους 7!

<u>Πρόβλημα 5:</u>

Πάρτυ → συμμετέχουν καθηγητές που έχουν 1 γιο τουλάχιστον
Πόσες πιθανότητες να έχει δύο γιους ο Διευθυντής, ενώ έχει δύο παιδιά;

Π. Δ
- Γ
  - Κ (1)
  - Γ (2)
- Κ
  - Κ (3)
  - Γ (4)

Η (3) απορρίπτεται γιατί έχει σίγουρα 1 γιο
Άρα $P(A) = \frac{1}{3}$